

APRIL/MAY 2023

CMA61 — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

If V is a vector space, show that $\alpha \cdot 0 = 0$ for $\alpha \in F$ and $0 \cdot v = 0$ for $v \in V$.

V ஒரு வெக்டர் வெளி எனில், $\alpha \cdot 0 = 0$, $\alpha \in F$ மற்றும் $0 \cdot v = 0$, $v \in V$ எனக் காட்டு.

2. If S is a non-empty subset of a vector space, what is meant by linear span of S ?

S என்பது ஒரு வெக்டர்வெளியின் வெற்றற்ற உட்கணம் எனில், S -ன் நேரியல் அளாவல் என்றால் என்ன?

3. Define annihilator of a subspace of a vector space.

ஒரு வெக்டர்வெளியின் உள்வெளியின் சுழியாக்கியை வரையறு.

4. Define inner product space.

உள் பெருக்கல் வெளியை வரையறு.

5. Define Algebra.

அறமத்தை வரையறு.



6. Define characteristic vector of a linear transformation.

ஒரு நேரியல் உருமாற்றத்தின் சிறப்பு வெக்டரை வரையறு.

7. When do you say two linear transformations are similar?

இரண்டு நேரியல் உருமாற்றங்கள் வடிவொத்த உருமாற்றங்களை எப்போது கூறலாம்?

8. Define a triangular matrix and give an example.

ஒரு முக்கோண அணியை வரையறை செய்து எடுத்துக்காட்டு தருக.

9. For $A, B \in F_n$, show that $tr(AB) = tr(BA)$.

$A, B \in F_n$ எனில் $tr(AB) = tr(BA)$ எனக் காட்டுக.

10. Give an example for a skew symmetric matrix.

எதிர் சமச்சீர் அணிக்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருக.

SECTION 3 — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Define Kernel of a homomorphism and show that it is a subspace.

ஒரு செயலொப்புமையின் உட்கருவை வரையறை செய்து அது ஒரு உள்வெளி என நிரூபி.

Or

17. State and prove Schwarz inequality.

சுவார்ட்சு சமனின்மையை எழுதி நிரூபி.

18. If A is an algebra with unit element over F , show that A is isomorphic to a subalgebra of $A(V)$ for some vector space V over F .

A என்பது அலகு உறுப்பு உடைய அறமம் எனில், ஏதேனும் ஒரு வெக்டர்வெளி V க்கு A ஆனது $A(V)$ -ன் உள் அறமத்திற்கு சம ஒப்புமை உடையது எனக்காட்டு.

19. If V is n dimensional over F and if $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F , prove that T satisfies a polynomial of degree n over F .

V ஒரு முடிவுறு பரிமாணம் n உடைய வெக்டர் வெளி, $T \in A(V)$ -ன் அனைத்து சிறப்பு மூலங்களும் F -ல் இருந்தால், படி n உள்ள பல்லுறுப்பானை T பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபி.

20. State and prove Crammer's rule.

கிராமரின் விதியை எழுதி நிரூபி.

(b) If S and T are subsets of a vector space V , prove that (i) $S \cup T$ implies $L(S) \subset L(T)$ (ii) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ (iii) $L(L(S)) = L(S)$.

S மற்றும் T என்பது வெக்டர் வெளியின் உட்கணங்கள் எனில் $S \cup T \Rightarrow L(S) \subset L(T)$ (ii) $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ (iii) $L(L(S)) = L(S)$. என நிறுவுக.

12. (a) Show that $H(V, W)$ is a vector space over F where V and W are vector spaces over F .

V மற்றும் W என்பவை F -ன் மேல் வெக்டர் வெளிகள் எனில் $Hom(V, W)$ ஒரு வெக்டர் வெளி என நிரூபி.

Or

(b) Define an ortho normal set in a vector space. If $\{v_i\}$ is a ortho normal set then prove that the vector in $\{v_i\}$ are linearly independent.

ஒரு வெக்டர் வெளியில் நெறிம அலகு செங்குத்து கணத்தை வரையறு. $\{v_i\}$ ஒரு நெறிய அலகு செங்குத்து கணம் எனில் $\{v_i\}$ என்ற வெக்டர்கள் நேறியல் சார்பற்றவை என நிரூபி.

13. (a) If V is a finite-dimensional over F , then if $T \in A(V)$ invertible prove that iff the constant term of the minimal polynomial for T is not zero.



V முடிவுறு பரிமானம் உடையது எனில் $T \in A(V)$ நேர்மாறு உடையதாக இருக்கத் தேவையான போதுமான நிபந்தனை T -ன் மீச்சிறு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மாறிலி உறப்பு பூஜ்யம் அற்றது என நிரூபி.

Or

- (b) If $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in (A(V))$ then prove that λ is a root of the minimal polynomial of T .

$\lambda \in F$ ஆனது $T \in (A(V))$ -ன் சிறப்பு மூலம் எனில் λ T -ன் மீச்சிறும பல்லுறுப்பானின் மூலம் என நிரூபி.

14. (a) If $S, T \in A(V)$, show that $M(S+T) = M(S) + M(T)$.

$S, T \in A(V)$ எனில் $M(S+T) = M(S) + M(T)$ எனக்காட்டு.

Or

- (b) Compute: $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)^2$.

$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)^2$ கணக்கிடுக.

15. (a) If $T \in A(V)$, show that $tr(T)$ is the sum of the characteristic root of T as often as its multiplicities.

$T \in A(V)$ எனில் $tr(T)$ என்பது T -ன் சிறப்பு மூலங்களின் கூடுதல் எனக்காட்டு (அவற்றின் மடங்குகளைப் போல்).

Or

- (b) Solve using Cramer's Rule

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1.$$

கிராமரின் விதியை உபயோகித்து தீர்.

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1.$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1.$$

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If V is finite dimensional and if W is a subspace of V , prove that W is finite dimensional $\dim W \leq \dim V$, $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

V ஒரு முடிவுறு பரிமான வெக்டர் வெளி, W அதன் உள்வெளி எனில் W முடிவுறு பரிமானம் உடையது. $\dim W \leq \dim V$, $\dim V/W = \dim V - \dim W$ என நிரூபி.